УДК 539.3: 534.1

С. П. Иванов

РАСЧЕТ ТОННЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА В. З. ВЛАСОВА

Эксплуатация транспортных систем связана с экологической безопасностью. Поэтому проектирование и расчет тоннелей является актуальной задачей. Разрабатывается методика расчета тоннелей с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала. Получены основные уравнения и представлен пример расчета.

Введение. В связи с экологической безопасностью и перегруженностью наземного транспорта возникает острая необходимость проектирования подземных транспортных систем. Наиболее экологически безопасным является метрополитен. Тоннели метрополитена короткой длины можно представить как призматические системы, контактирующие с упругой средой. В случае, когда отдельные участки испытывают сжатие в продольном направлении, то эти участки тоннеля необходимо рассматривать как пространственные задачи. Если оболочка тоннеля достаточно протяженная, то ее можно рассматривать как плоскую задачу теории упругости.

Целью работы является разработка методики расчета оболочки тоннелей.

Интерпретация результатов. Расчетная схема предлагается в виде однослойной модели Власова-Леонтьева [1, 2]. Как указывает В.З.Власов, данная модель является более совершенной, чем винклеровская модель, вследствие того, что она способна «распределять» нагрузку. В основу разрабатываемой методики расчета закладывается модель нелинейно-упругого материала оболочечной системы. Экспериментальные данные таких материалов, как бетон, различные сплавы, композиты, показывают, что зависимость между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций e_i можно принять в виде кубического полинома

$$\sigma_i = E \cdot e_i - E_1 e_i^3 , \qquad (1)$$

где E – начальный модуль упругости, E_1 – постоянная, учитывающая степень нелинейности материала (принимаются на основании экспериментальных данных).

Учитываем гипотезы Кирхгофа-Лява. Полагаем, что направляющие тензоров напряжений и деформаций совпадают. Используем известные соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_x = e_x - z\chi_x; \quad \varepsilon_s = e_s - z\chi_s; \quad \varepsilon_{xs} = e_{xs} - 2z\chi_{xs}, \qquad (2)$$

где $e_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $e_s = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial s}$; $e_{xs} = \dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$; $\chi_x = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\chi_s = \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}$; $\chi_{xs} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}$.

Величины u, v и w соответствуют компонентам вектора перемещений точки K срединной поверхности пластинчатой системы в продольном x, поперечном s и нормальном z направлениях (рис.1).

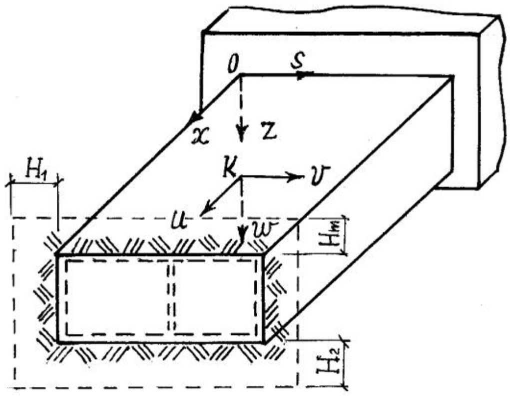

Рис. 1. Схема участка оболочки тоннеля в упругой среде

Двумерная задача сводится к одномерной. Перемещения выражаются по В.З.Власову [1] и принимаются в виде разложений:

$$u(x,s)=\sum_i U_i(x)\varphi_i(s); \qquad v(x,s)=\sum_k V_k(x)\psi_k(s);$$
$$w(x,s)=\sum_d W_d(x)f_d(s), \quad (i=1,2,3,\ldots,m;k,d=1,2,3,\ldots,n). \tag{3}$$

Выражения интенсивности деформаций e_i и объемной деформации θ с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и сжимаемости материала ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{sz} = 0$) можно записать следующим образом:

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_s)^2+(\varepsilon_s-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}\varepsilon_{xs}^2} \tag{4}$$

$$\theta=\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_s), \tag{5}$$

а деформация

$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_s). \tag{6}$$

Составим удельную энергию изменения объема и формы [3]

$$\Phi=\frac{1}{2}\mathrm{K}\theta^2+\frac{2}{3}\int_0^{e_i}(1+\nu)\cdot\sigma_i\cdot de_i, \tag{7}$$

где $\mathrm{K}=E/[3(1-2\nu)]$ – модуль объемного сжатия.

Работа, отнесенная к единице площади поверхности оболочки, равна

$$A=\int_{-\delta/2}^{\delta/2}\Phi dz, \tag{8}$$

где δ – толщина элемента оболочки.

Следуя методу В.З. Власова [1], призматическую систему принимаем дискретно-континуальной. Выбор координатных функций $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$, $f_d(s)$ осуществляется по виду деформированного состояния системы. Искомые функции U_i(x), $V_k(x)$ и $W_d(x)$ являются обобщенными перемещениями и подлежат определению из решения задачи. В дальнейших записях функций переменные, указанные в скобках, опускаем.

Составляем полную энергию для системы

$$\Pi = \iint (A + q_x \sum_i U_i \varphi_i + q_s \sum_k V_k \psi_k + q_z \sum_d W_d f_d) dx ds, \tag{9}$$

где q_x $q_{s,}$ q_z – интенсивности внешних нагрузок, действующих на систему в продольном, поперечном и нормальном направлениях.

Из условий совместности деформаций в местах соединений пластин оболочки можно принять при $d = k$

$$W_d = V_\mathrm{k}. \tag{10}$$

Углы между пластинами учитываются при выборе координатных функций.

Определим минимум функционала (9), используя уравнения Эйлера-Лагранжа [4]:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_i^{'}} - \frac{\partial F}{\partial U_\mathrm{i}} = 0; \\ &-\frac{\mathrm{d}^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial V_k^{''}} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial V_k^{'}} - \frac{\partial F}{\partial V_k} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где F – подынтегральная функция (11), штрихи означают обычные производные от функций по переменной x.

Полагаем, что прогибы пластин, составляющих систему, совпадают с осадкой упругой среды. Развернув уравнения (11) и присоединив работу реактивных давлений $Q_j^{осн.}$, $Q_\nu^{осн.}$ упругой среды [1] соответственно в продольном и нормальном направлениях:

$$Q_j^{осн.} = \sum_i a_{ji}^0 U_i \, ; \; Q_\nu^{осн.} = 2\sum_k \rho_{hk}^0 V_k^{''} - \sum_k s_{hk}^0 V_k, \tag{12}$$

получим уравнения равновесия.

Принимая, что деформированное состояние соответствует моменту потери устойчивости системы в упругой среде, в точках поперечного сечения системы все обобщенные поперечные нагрузки Q_v выразим через параметр продольной силы Р и кривизну образующей срединной поверхности оболочки [1]

$$Q_\nu = P\sum_k \tilde{r}_{hk} V_k^{''}, \tag{13}$$

приходим к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений продольно-поперечного изгиба и устойчивости оболочки в упругой среде:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \sum_i a_{ji} U_i^{''} - \sum_i \bar{b}_{ji} U_i - \sum_k c_{jk} V_k^{'} = \varPhi_\mathrm{j}; \\ &-\gamma_1 \sum_k e_{hk} V_k^{IV} + \sum_k [\frac{P}{G}\tilde{r}_{hk} + \bar{r}_{hk} + \frac{2\gamma}{1+\nu}(m_{hk} - \frac{\nu}{1-\nu}\alpha_{hk})] V_k^{''} - \sum_k \bar{s}_{hk} V_k + \\ &+ \sum_i c_{hi} U_i^{'} + \bar{Q}_\nu = \varPhi_\mathrm{h}, \end{aligned} \tag{14}$$

где
$$\bar{Q}_\nu = \frac{1}{G}\int_s (q_h \psi_h + q_z f_h) ds;$$

$$\bar{b}_{ji} = b_{ji} + \frac{1}{G}a_{ji}^0; \quad \bar{r}_{hk} = r_{hk} + \frac{1}{G}\rho_{hk}^0; \quad \bar{s}_{hk} = \gamma_1 s_{hk} + \frac{1}{G}s_{hk}^0; \quad \gamma_1 = \frac{E}{G(1-\nu^2)};$$

$$a_{ji}^0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)H_m}\int_s \varphi_j\varphi_i ds; \quad \rho_{hk}^0 = \frac{E_0 H_m}{12(1+\nu_0)}\int_s f_k f_h ds;$$
$$s_{hk}^0 = \frac{E_0}{H_m(1-\nu_0^2)}\{\int_s f_k f_h ds + \frac{H_m^2(1-\nu_0)}{6}\int_s f_k' f_h' ds\}. \tag{15}$$

В уравнениях и в коэффициентах приняты следующие обозначения: E_0, ν_0 – соответствуют модулю деформации и коэффициенту Пуассона упругой среды; выражения Φ_j и Φ_h в (15) учитывают физическую нелинейность материала оболочки [5].

Для решения данной задачи составлена программа на языке Фортран. Интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений ведется численным методом Рунге-Кутта. Поиск недостающих краевых условий нелинейной задачи проводится итерационным методом типа Ньютона.

Для определения критической нагрузки применяется шаговый метод. За ведущий параметр принимается продольная нагрузка. Момент расхождения итерационного процесса принимается за критическое состояние оболочки.

В качестве примера рассчитывалась на сжатие с кручением оболочка тоннеля замкнутого поперечного сечения, контактирующая с упругой средой. Геометрические параметры оболочки следующие: δ/a=1/48 – отношение толщины стенки оболочки к поперечному размеру, l/a=15 – отношение длины к наибольшему поперечному размеру, $a/в$=1,5 – отношение большей стороны поперечного сечения к меньшей. Отношение деформируемого слоя упругой среды к поперечному размеру системы равно H/a=2,5, а отношение E_0/G=0,001. Степень физической нелинейности принималась $E_1/E=10^5$. Сжимающие силы прикладываются к торцам оболочки (рис. 2). Края оболочки опираются на диафрагмы, которые считаются абсолютно гибкими из своей плоскости и абсолютно жесткими в ней.

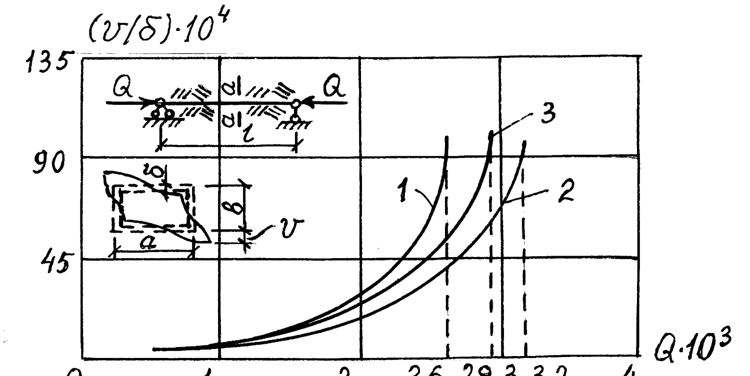

Рис. 2. Относительное перемещение угловой точки контура поперечного сечения а–а оболочки в зависимости от действия нагрузки: 1, 2 – по линейной теории соответственно без учета и с учетом упругой среды; 3 – с учетом физической нелинейности и упругой среды

Вывод. На основании проведенных исследований можно сделать заключение, что полученные уравнения позволяют рассчитывать на устойчивость оболочки тоннеля с учетом нелинейного деформирования материала.

Список литературы

1. *Власов, В.З.* Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
2. *Власов, В.З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 491 с.
3. *Лукаш, П.А.* Основы нелинейной строительной механики / П.А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
4. *Смирнов, В.И.* Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М. – Л.: ГИТЛ, 1957. – 627 с.
5. *Иванов, С.П.* Расчет нелинейных пластинчатых систем вариационным методом В.З. Власова / С.П. Иванов // Известия вузов. Строительство. – 2002. – №6. – С. 18 – 23.

Поступила в редакцию 10.08.07.